για τις εκ περιστροφής
στοιχεία:

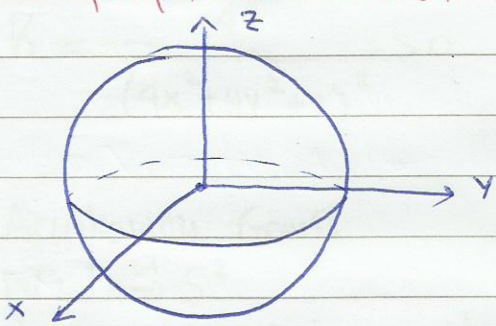
$\left\{X_s, \frac{X_\theta}{\|X_\theta\|} = \frac{X_\theta}{\varphi}\right\}$ ορθομοναδιαία βάση

$$\left\{\begin{array}{l} LX_s = \langle LX_s, X_s\rangle X_s + \langle LX_s, \frac{X_\theta}{\varphi}\rangle \frac{X_\theta}{\varphi} \\ LX_\theta = \langle LX_\theta, X_s\rangle X_s + \langle LX_\theta, \frac{X_\theta}{\varphi}\rangle \frac{X_\theta}{\varphi} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} LX_s = eX_s + \frac{f}{\varphi^2} X_\theta \\ LX_\theta = fX_s + \frac{g}{\varphi^2} X_\theta \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} LX_s = eX_s \\ LX_\theta = \frac{g}{\varphi^2} X_\theta \end{array}\right.$$

Το $k_1 = \max\{e, \frac{g}{\varphi^2}\}$ και $k_2 = \min\{e, \frac{g}{\varphi^2}\}$

~~Σφαίρα ως ειδική κατηγορία επιφάνειας εκ περιστροφής~~



$c(s) = (\cos s, 0, \sin s)$ με 1^{η} Θ.Μ.

$E = 1$, $F = 0$, $G = \cos^2 s$

$-\frac{\pi}{2} < s < \frac{\pi}{2}$, $K = 1$

~~Υπάρχουν άλλες επιφάνειες εκ περιστροφής με $K=1$;~~

$$K = 1 \Leftrightarrow -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi} = 1 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \varphi = 0$$

Θεωρώ $\varphi(s) = c \cdot \cos s$, $c > 0$

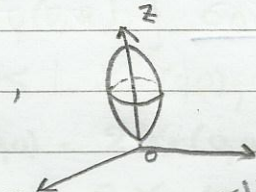
Για $c = 1$ έχω την S^2

Υποθέτω $c \neq 1$: $\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2 = 1 \Leftrightarrow c^2 \sin^2 s + \dot{\psi}^2 = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\dot{\psi})^2 = 1 - c^2 \sin^2 s$ Θεωρώ $\dot{\psi}(s) = \sqrt{1 - c^2 \sin^2 s} \Leftrightarrow$

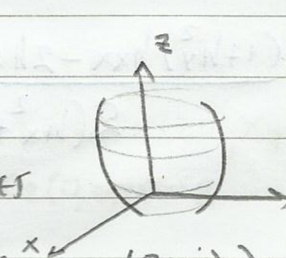
$\Leftrightarrow \psi(s) = \int_0^s \sqrt{1 - c^2 \sin^2 t}\, dt$

• Αν $c < 1$,



(πεπόνι)

• Αν $c > 1$,



(βαρέλι)

Τοπικά ισομετρικές αλλά όχι γεωμ. ισοδύν.

επιφάνειες γραφήματα

Έστω $h: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ λεία με γράφημα

$\Gamma h = \{(x,y,h(x,y)) / (x,y) \in U\}$

$X: U \to \Gamma h \ , \ X(x,y) = (x,y,h(x,y))$

$X_x = (1, 0, h_x)$

$X_y = (0, 1, h_y)$

1η θεμελιώδης μορφή:

$E = \|X_x\|^2 = 1 + h_x^2$

$F = \langle X_x, X_y \rangle = h_x h_y$

$G = \|X_y\|^2 = 1 + h_y^2$

το μοναδιαίο κάθετο $N = \dfrac{X_x \times X_y}{\|X_x \times X_y\|} = \dfrac{(-h_x, -h_y, 1)}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$e = \langle X_{xx}, N \rangle \Rightarrow e = \dfrac{h_{xx}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$f = \langle X_{xy}, N \rangle \Rightarrow f = \dfrac{h_{xy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$g = \langle X_{yy}, N \rangle \Rightarrow g = \dfrac{h_{yy}}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}}$

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2} \Rightarrow K = \dfrac{h_{xx} h_{yy} - h_{xy}^2}{(h_x^2 + h_y^2 + 1)^2}$

Έτσι

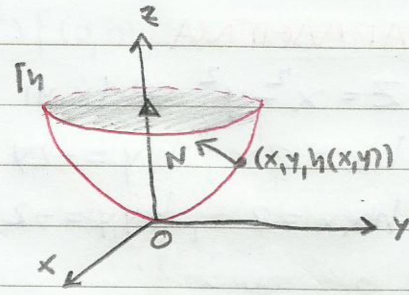
$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{h_x^2 + h_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} h_{xx} & h_{xy} \\ h_{xy} & h_{yy} \end{pmatrix}$$

Μέση καμπυλότητα

$$H = \frac{(1 + h_y^2) h_{xx} - 2 h_x h_y h_{xy} + (1 + h_x^2) h_{yy}}{2(h_x^2 + h_y^2 + 1)^{1/2}}$$

Παραδείγματα:

1) Έστω το παραβολοειδές:



$z = x^2 + y^2 = h(x,y)$

$h_x = 2x, \; h_y = 2y$

$h_{xx} = 2, \; h_{xy} = 0, \; h_{yy} = 2$

Πρώτη θεμελιώδης μορφή

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & 4xy \\ 4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}$$

Δεύτερη θεμελιώδης μορφή

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Καμπυλότητα Gauss

$$K = \frac{4}{(4x^2+4y^2+1)^2} > 0$$

Απεικόνιση Gauss

$N : \Gamma_h \xrightarrow{1-1} S^2$

$$N(x,y,h(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \cdot (-2x, -2y, 1)$$

Τα εφαπτόμενα επίπεδα σε κάθε σημείο του παραβολοειδούς έχουν μόνο ένα σημείο στην επιφάνεια

Στο $(0,0,0)$

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\{X_x(0,0), X_y(0,0)\}$ ορθομοναδιαία βάση του $T_{(0,0,0)}\Gamma_h$

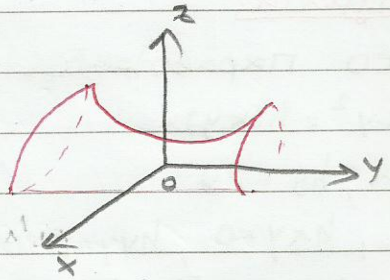
$$L X_x(0,0) = \langle L X_x(0,0), X_x(0,0) \rangle X_x(0,0) + \langle L X_x(0,0), X_y(0,0) \rangle X_y(0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} L X_x(0,0) = 2 X_x(0,0) \\ L X_y(0,0) = 2 X_y(0,0) \end{cases} \quad \Big| \quad k_1(0,0,0) = k_2(0,0,0) = 2$$

2) $z = x^2 - y^2 = h(x,y)$

$h_x = 2x, \ h_y = -2y$

$h_{xx} = 2, \ h_{yy} = -2, \ h_{xy} = 0$



Πρώτη Θεμελιώδης μορφή

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}$$

Δεύτερη Θεμελιώδης μορφή

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$

Καμπυλότητα Gauss:

$$K = -\frac{4}{(4x^2+4y^2+1)} < 0$$

Απεικόνιση Gauss

$$N(x,y,h(x,y)) = \frac{1}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}(-2x, 2y, -1)$$

Στο $(0,0,0)$:

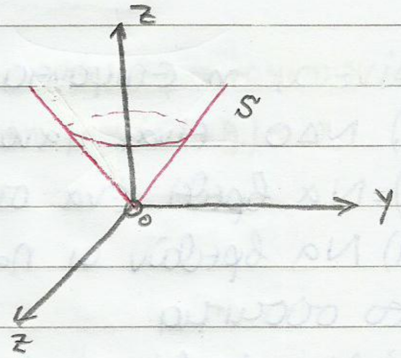
$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

και μάλιστα ομοια

$$\left.\begin{aligned} L X_x(0,0) &= 2 X_x(0,0) \\ L X_y(0,0) &= -2 X_y(0,0) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} k_1(0,0,0) &= 2 \\ k_2(0,0,0) &= -2 \end{aligned}$$

3) $S: z=\sqrt{x^2+y^2}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$

$h(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



$$h_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \& \quad h_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$h_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$h_{yy}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$h_{xy}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$X(x,y)=(x,y,\sqrt{x^2+y^2})$$

Πρώτη Θεμελιώδης Μορφή:

$$E=1+h_x^2=\frac{2x^2+y^2}{x^2+y^2}$$

$$F=h_xh_y=\frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$G=1+h_y^2=\frac{x^2+2y^2}{x^2+y^2}$$

Δεύτερη Θεμελιώδης Μορφή

$e=\dots$, $f=\dots$, $g=\dots$

Καμπυλότητα Gauss

$$K=\frac{h_{xx}h_{yy}-h_{xy}^2}{(h_x^2+h_y^2+1)^2}=0$$

Απεικόνιση Gauss $N: S\to S^2$

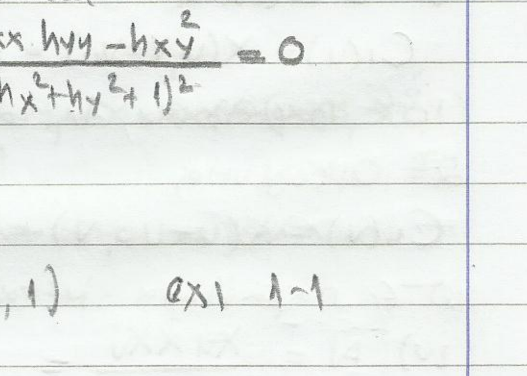
$$N(x,y,h(x,y))=\frac{1}{\sqrt{h_x^2+h_y^2+1}}(-h_x,-h_y,1)$$ όχι 1-1

$$h_x^2+h_y^2+1=\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}+1=\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=2$$

Άρα, $N(x,y,\sqrt{x^2+y^2})=\frac{1}{\sqrt2}\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$

με σφαιρική εικόνα

$N(S)$ = ο μικρός κύκλος που βρίσκεται στο επίπεδο $z=\frac{1}{\sqrt2}$



Η Gauss όχι 1-1 αφού ο κώνος πάνω σε μια γενέτειρα έχει το ίδιο μοναδιαίο κάθετο

$\Rightarrow$ ορίζουσα του διαφορικού ίση με μηδέν

Ασκήσεις

1) Δίνεται η επιφάνεια $S: z = x^2+y^3$

i) ΝΔΟ είναι κανονική

ii) Να βρεθεί ένα σύστημα συντεταγμένων $X(u,v)$

iii) Να βρεθούν οι παραμετρικές καμπύλες ως προς αυτό το σύστημα

iv) Να βρεθεί το μοναδιαίο κάθετο και το εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(1,2)$

ΛΥΣΗ

i) Η S είναι κανονική ως γράφημα $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $h(x,y) = x^2+y^3$

ii) Ένα σύστημα συντεταγμένων είναι $X: \mathbb{R}^2 \to S$

$X(u,v) = (u, v, h(u,v)) = (u, v, u^2+v^3)$

iii) Παραμετρικές καμπύλες

1η Οικογένεια:

$C_1(u) = X(u, v=v_0) = (u, v_0, u^2+v_0^3)$ παραβολές σε παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα

2η Οικογένεια

$C_1(v) = X(u=u_0, v) = (u_0, v, u_0^2+v^3)$ κυβική καμπύλη σε παράλληλα μεταξύ τους επίπεδα

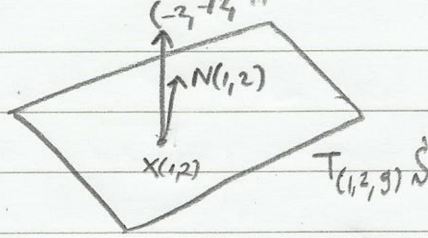
iv) $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \dfrac{1}{\sqrt{h_u^2+h_v^2+1}}(-h_u, -h_v, 1)$

$X_u = (1,0,2u)$, $X_v = (0,1,3v^2)$

$$X_u \times X_v = \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 3v^2 \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{4u^2+9v^4+1}}(-2u, -3v^2, 1)$$

$X(1,2) = (1,2,1+8) = (1,2,9)$



Το επίπεδο που εφάπτεται είναι:
$-2(x-1)-12(y-2)+1(z-9)=0$

2) Δίνεται η επιφάνεια $z=e^x+e^y$ με σύστημα συντεταγμένων $X:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $X(u,v)=(u,v,e^u+e^v)$. Να βρεθούν I, II θεμελ. μορφές και η κάθετη καμπυλότητα $K_n(c'(t))$ με $c(t)=X(t,t)$.

ΛΥΣΗ

$X_u = (1,0,e^u)$ | $X_{uu} = (0,0,e^u)$ και $X_{uv}=0$

$X_v = (0,1,e^v)$ | $X_{vv} = (0,0,e^v)$

(I): $E = \|X_u\|^2 = 1+e^{2u}$, $F = \langle X_u, X_v \rangle = e^u \cdot e^v$

$G = \|X_v\|^2 = 1+e^{2v}$

Το μοναδιαίο κάθετο $N = \dfrac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}$, $X_u \times X_v = (-e^u, -e^v, 1)$

και

$$N = \frac{1}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}(-e^u, -e^v, 1)$$

(II) $e = \langle X_{uu}, N \rangle = \dfrac{e^u}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$, $f = \langle X_{uv}, N \rangle = 0$ και

$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \dfrac{e^v}{\sqrt{e^{2u}+e^{2v}+1}}$

$K_n(w) = \dfrac{II(w)}{I(w)} = \dfrac{ea^2+2fab+gb^2}{Ea^2+2Fab+Gb^2}$ με $w = aX_u + bX_v$

Έτσι, $c'(t) = 1\,X_u(t,t) + 1\cdot X_v(t,t)$

$$K_n(c'(t)) = \frac{\mathrm{II}_{c(t)}(1\cdot X_u(t,t) + 1 X_v(t,t))}{\mathrm{I}_{c(t)}(1\cdot X_u(t,t) + 1\cdot X_v(t,t))} =$$

$$= \frac{e(t,t)1^2 + 2f(t,t)\cdot 1\cdot 1 + g(t,t)1^2}{E(t,t)\cdot 1^2 + 2f(t,t)1\cdot 1 + G(t,t)1^2} =$$

$$= \frac{e^t/\sqrt{e^{2t}+e^{2t}+1} + e^t/\sqrt{e^{2t}+e^{2t}+1}}{(1+e^{2t})1 + 2e^t\cdot e^t + (1+e^{2t})}$$

3) Εστω η παραμετρική επιφάνεια $X : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$

$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + vu^2,\ u^2 - v^2\right)$.

i) ΝΔΟ είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια.

ii) Να βρεθούν $\mathrm{I}, \mathrm{II}, K, H$

ΛΥΣΗ

i) $\left.\begin{aligned} X_u &= (1-u^2+v^2,\ 2uv,\ 2u) \\ X_v &= (2uv,\ 1-v^2+u^2,\ -2v) \end{aligned}\right\}$

$X_u \times X_v = (-2u^3 - 2uv^2 - 2u,\ 2v^3 + 2u^2v + 2v,\ 1 - 2u^2v^2 - u^4 - v^4) =$

$= (-2u(u^2+v^2+1),\ 2v(v^2+u^2+1),\ 1-(u^2+v^2)^2) =$

$= (u^2+v^2+1)(-2u, -2v, 1-u^2-v^2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \|X_u \times X_v\|^2 = 4u^2 + 4v^2 + (1-u^2-v^2)^2 = (1+u^2+v^2)^2 > 0$

ii) $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+u^2+v^2)^2 & 0 \\ 0 & (1+u^2+v^2)^2 \end{pmatrix} = (1+u^2+v^2)^2 I_2$

$\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/1+u^2+v^2 & 0 \\ 0 & -2/1+u^2+v^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{1+v^2+u^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$K = -4/(1+u^2+v^2)^4 < 0$

$H = 0$ ~~άρα~~ είναι ελαχιστική επιφάνεια